（別刷）

問題に潜む数学の背景を鑑賞する

松延　和典　　　　坂本　憲二

生涯学習研究
── 聖徳大学生涯学習研究所紀要 ──
第 16 号　別冊
2018 年 3 月

問題に潜む数学の背景を鑑賞する

松延 和典・坂本 憲二

要旨

近年，生涯学習や学び直しが盛んであり，いろいろなところでそういう機会が提供されている。算数･数学もその中のひとつといえよう。実際，社会人のための数学の講座も様々なところで見られる。文部科学省においても大学改革を推進する一つの取組としてリカレント教育の抜本的強化をあげている。

こうしたことを踏まえ，多くの方がこれまでに出会った算数・数学の内容の一部について，新たな視点，見直しの観点を提供し，再度興味関心を持っていただくことを狙いとして本稿を記すこととした。

題材は，身近なものからはじめる。見方を変えることで，高校の最終学年で学ぶ級数の考えに結び付ける。さらに，級数の収束について新たな考察を試みる。

問　３時と４時の間で，時計の長針と短針が重なる時刻を求めよ。

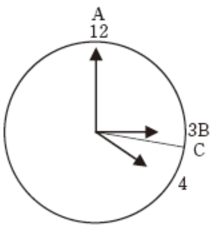
まず，オリジナルの解答を示す。

（解１）時計の「12 時」を「A」，「３時」を「B」，重なるところを「C」とする。長針と短針の進む速さの比は 12：1 であるから，同じ時間に進んだ距離も 12：1 となる。

弧ＡＣ：弧ＢＣ＝ 12 ： 1　となることから

弧ＡＢ：弧ＡＣ＝ 11：12

したがって，「C」の分の読みは，



$15 \times \frac{12}{11}$ 分 $= \frac{180}{11}$ 分 $= 16\frac{4}{11}$ 分

求める時刻は　３時 $16\frac{4}{11}$ 分

なお，秒まで計算すると　３時 16 分 $21\frac{9}{11}$ 秒　（解１終）

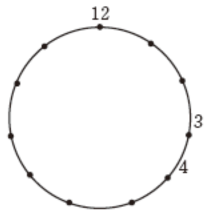
12 時間全体に着目すると次のように求めることもできる。

（解２）長針と短針の重なる位置は，12 時，１時と２時の間，…，10 時と 11 時の間と 11 か所ある。これらは，周を 11 等分する。

これを「11 分点」と呼ぶことにする。

３時と４時の間の重なる点の分の読みは，

$60 \times \frac{3}{11}$ 分 $= \frac{180}{11}$ 分



（以下略）（解２終）

一般にこの問題は，次のように解説されることが多い。

３時から何分かかって長針が短針に追いつくかを，角度で計算して求めるのである。

（解３）長針は，１時間すなわち 60 分で 360° 進むから，１分間に 6° 進み，短針はその 1/12 の 0.5° 進む。

6 − 0.5 ＝ 5.5

から１分間に長針は短針より 5.5° 多く進む。

３時のとき，長針と短針のなす角は 90° であるので，追いつくのに要する時間は

90 ÷ 5.5 ＝ 180/11（分）

である。（以下略）（解３終）

上の３つの解答は，大局的には五十歩百歩であろう。違った印象を与えているとすれば，その要因として「解３」では，３時から何分かかって長針が短針に追いつくかを計算しているのに対し，はじめの二つは長針と短針の重なる位置を特定して時刻を読んでいることがあげられる。解答に長短（長い短い）はあるものの，早く解ければよいというものでもない。ときには「遠回りする知性」も魅力的でさえある。多くの考え方に接することが，思考力を鍛えることになる。

ということもあり，「解３」と同じ発想でも角度を用いずに解くことを次に試みる。

（解４）時計の周に，「12 時」を起点として，周を 12 等

分する目盛が振られているとする。

１時間で，長針は 12 目盛進み，短針は１目盛進む。

12 － 1 =11

であるから，1 時間に 11 目盛だけ長針は短針より多く進む。

３時のとき，長針と短針は３目盛違うのでそれを詰めるのに要する時間は

$3 \div 11 = \frac{3}{11}$（時間）　すなわち　$60 \times \frac{3}{11} = \frac{180}{11}$（分）

（以下略）（解４終）

さて，問題の解答を離れ，さらに考察を進める。

長針と短針の速さの比が 12 ： 1 であることから

12 － 1 = 11

という式を作り，この式の両辺を 11 でわってみる。

$\frac{12}{11} - \frac{1}{11} = 1$

長針の 12/11 周は 12/11 時間経過に相当するが，短針の１周は 12 時間なので短針の 1/11 周も 12/11 時間に相当する。

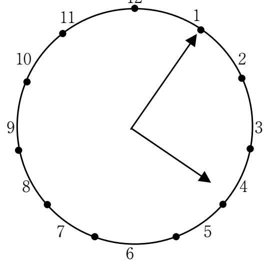
上の式から 12/11 時間ごとに長針と短針の移動の差が１周となるが，これは長針と短針の相対的な位置関係が同じになる（変わらない）ことを意味する。

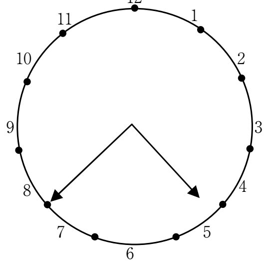
このことから，例えば，３時あるいは９時には長針と短針は直角になるが，他の時間で長針と短針が直角になるのは，長針が 11 分点（解２で定義，以下同様）にきたときとなることがわかる。

なぜなら，重なったところがどこであっても３時間後には，長針は３回転してはじめに着目したその場所に戻り，短針は 1/4 回転すすむ。かくして,「３時」の形となり長針と短針は 90° の角をなす。

逆に，時計の針が「３時」の形をしていれば，その長針の場所で９時間後に長針と短針は重なるので，長針のあった位置は 11 分点のいずれかとなる。「９時」についても同様である。

さらに例えば，４時と５時の間で直角となるのは，下の図から４時 60/11 分 と４時 60 × 7/11 分などとわかる。





また，11 分点に長針がきたときは，長針と短針のなす角は，30° の倍数になることもわかる。

多くの場合，事象を捉えそれを式に表すが，逆に今の

12/11 － 1/11 ＝ 1

から見たように，式から事象が見えることもあるということがわかる。

式から事象を読み解く例をもう一つあげる。問も解もオリジナルである。

問　A，B二人がトラックを５周する競技を行う。
　A，Bの速さは常に一定でその比は 11： 7 である。このときAはBをどの地点で追い越すか。またそれはどの地点か。

（解）　11 － 7 ＝ 4

という式を作り，両辺を 4 でわると

$\frac{11}{4} - \frac{7}{4} = 1$

となる。このことから，Aが 11/4 周したとき，Bが 7/4 周して差が１周となる。二人ともこの時点でゴールはしていない。

$\frac{11}{4} = 3\frac{3}{4}$

であるから，スタート地点から進行方向に 3/4 周の地点で，AはBを追い越す。

もう一度追い越すためには,さらにAは 11/4 周走らなければならず，トラックを 11/4 × 2 =11/2=5.5（周）しなければならないが，競技は５周までなので，これは起こらない。（解終）

ここで，時計の問題に戻り，これまでの考えの琴線に触れる次の創作問題を提示する。現実的とはいえないが，考えるには値する。

問　目盛版が消えて上下の分からなくなった円形の電池時計がある。これを使えるようにするにはどうすればよいか。

長針と短針を動かし，重なったところを「12 時」として目盛を振る。後は，電池を入れて，時刻を合わせればよい。（解終）

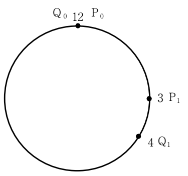
心情を込めて一端を述べるならば，長針と短針がどこで重なっても重なった一時間後には，長針と短針は「１時の形」になっているということである。

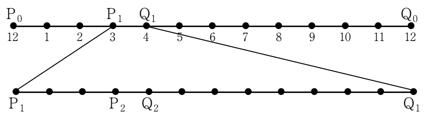
「時計」について分かったことをまとめると

・任意の長針短針の位置に対し，文字盤の当て方は 11 通りある。

次は，無限の萌芽が見られる考えについて検討する。

３時と４時のときの長針の位置をそれぞれ P_0，Q_0（実は P_0 と Q_0 は同じ点）とし，同じく短針の位置を P_1，Q_1 とする。





この状況を，時計の周を直線にして書けば，上右図となる。

長針が P_0 から Q_0 まで動くとき，短針は P_1 から Q_1 まで動く。次に，P_2，Q_2 をそれぞれ長針の P_1，Q_1 に対応する短針の位置と定める。すると，長針が P_1 から Q_1 まで動くとき，短針は P_2 から Q_2 まで動く。

直線で表した図において，

$P_0P_1 : Q_1Q_0 = 3 : 8$

が成り立ち，

$P_1P_2 : Q_2Q_1 = 3 : 8$

も成り立つ。これより

$P_0P_2 : Q_2Q_0 = 3 : 8$

も成り立つ。

これを続けていけば，長針と短針が重なる位置を R とするとき

$P_0R : RQ_0 = 3 : 8$

が成り立つ。これは，時計の周を長針と短針の重なる位置で 11 等分したときの結果と一致する。

また

$P_1R : RQ_1 = 3 : 8$

も成り立つ。

P_0，P_1，P_2，…，Q_0，Q_1，Q_2，…について洗練された書き方をすれば，P_0，Q_0 を上記のように定めたあと

「P_i，Q_i（$i = 1, 2, 3\cdots$）は，長針が P_{i-1}，Q_{i-1} にあるときの短針のそれぞれの位置とする」となろう。

ここで，今の「前から追いかける」方だけに着目し，次のように計算する考え方もある。

最初の問題で，３時と４時の間で，長針と短針が重なるためには，３時から何分時間が経過するかと捉え，これを次のように考えてみる。

３時の短針があった位置まで，長針は３時から 15 分かかる。そのとき短針は，その 12 分の１だけ先にあるから，さらにその位置まで長針がくるには，15 分の 12 分の１の時間を要する。このように考えていくと，３時をスタートとし，長針が短針に追いつくのに要する時間は，

$$15+15\times\frac{1}{12}+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^2+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^3+\cdots \quad \cdot\cdot\cdot\cdot(☆)$$

となる。

これを求めるには，高校で学ぶ級数の知識が必要となる。

このように，時計の長針・短針が重なる時間の問題について素直に考えると，自然な感覚として，ツェノンの逆理のように上記の無限級数が出てくるであろう。(ツェノンの逆理に出てくる級数と上記の級数の大きな違いはどこにあるのかの話はここではしない。）上記の級数は，「無限等比級数」と呼ばれるもので，高校では３年生の「数学Ⅲ」という科目で扱われることになっている。

例えば，次の２つのような無限等比級数の値はいくつになるのかを考えてみよう。

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots \quad \cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^6+\cdots \quad \cdot\cdot\cdot\cdot(2)$$

教科書では次のように教えている。公比を $r(-1<r<1)$ とすれば

$S = r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+\cdots$ ・・・・・（★）

の値を求めるのに第 n 項までの和を S_n とし，S_n を求める。

$S_n = r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+\cdots+r^n$ ・・・・・・・・（3）

$r\ S_n = \quad r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+\cdots+r^n+r^{n+1}$ ・・・・・（4）

であるから　(3)－(4)　を計算すると

$(1-r)S_n=r-r^{n+1}$

よって

$$S_n=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$$

ここで　$n\to\infty$　とすると　$r^{n+1}\to 0$　となるから

結局　$n\to\infty$　のとき　$S=\frac{r}{1-r}$　・・・・・・・・（5）

であり

したがって

$$r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+\cdots\cdots\cdots=\frac{r}{1-r} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(6)$$

となる。

よって（6）において　$r=\frac{1}{3}$　とすれば

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・（7）

となる。

同様にして公式（6） を使えば $r=\frac{2}{5}$ のとき

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^6+\cdots=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$$

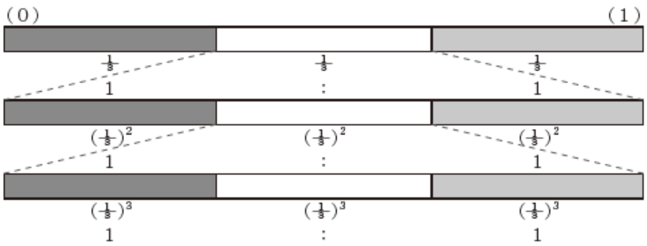
・・・・・・・・・・・・・・・・・・（8）

などが求められる。

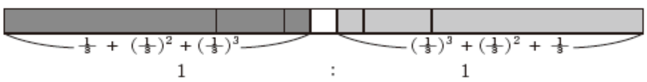
上記の方法が計算による確かな方法ではあるが，実は数学の得意な生徒でさえ,「公式から簡単に値を求めることはできても，なぜその値になるのか，本当に収束するのかの実感に乏しい」と感じている。

そこでここでは（7）や（8）の式のような無限等比級数の値がなぜそうなるのか直観的理解が得られる説明を試みてみよう。

まず（1）の値について考えてみる。区間［0，1］を3等分し，さらに真ん中の区分を3等分するという操作を繰り返していく。



上の3つのテープ図を1つのテープ図にまとめると



よってこの操作を限りなく続けていくと，真ん中の□の部分が限りなく0に近づき，最終的に次のようになる。

したがって，区間［0，1］は

: = 1 : 1

に分けられるので

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

となる。

ここで,

$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots\cdots\cdots$

であるから，以上により，無限等比級数（1）の値は

$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{2}$

となるのである。

ここで，本質的なことは，真ん中の区間が

$\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^2$，$\left(\frac{1}{3}\right)^3$，$\left(\frac{1}{3}\right)^4$，$\left(\frac{1}{3}\right)^5$，$\left(\frac{1}{3}\right)^6$，…

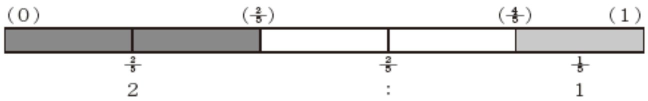
と限りなく0に近づいていくことである。

次に級数（2）の値を求めてみよう。

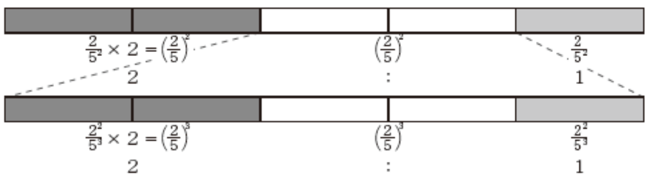
これまでと同様に区間［0，1］を5等分して，

との部分を，それぞれ5等分の2個分（つまり2/5の長さ）ずつとる。

すると，との比は2：1となる。



の長さ2/5の部分をさらに5等分し，ととの部分をそれぞれ5等分のうちの2個分（2/5を5等分した2個分だから長さは $(2/5)^2$）と1個分に分けるというように，この操作を繰り返していく。



結局，の部分が

$\frac{2}{5}$，$\left(\frac{2}{5}\right)^2$，$\left(\frac{2}{5}\right)^3$，$\left(\frac{2}{5}\right)^4$，$\left(\frac{2}{5}\right)^5$，$\left(\frac{2}{5}\right)^6$，…

と限りなく0に近づいていくので最終のイメージは次のようになる。

ここで，本質的なのは，の部分の長さが2/5倍，2/5倍，2/5倍になっていくと，この長さの極限値が0になるということである。

さて，

■：■＝ 2： 1であるから，

■$=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$

すなわち無限等比級数（２）の値は

$$■=\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{2}{3}$$

となる。

ここで，長針と短針が重なるときの問題を改めて考えてみよう。

無限等比級数（☆），すなわち

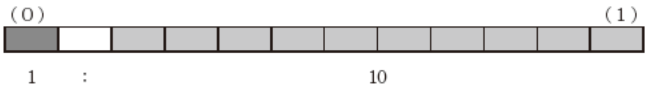
$$15+15\times\frac{1}{12}+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^2+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^3+\cdots$$

の値を求める。

$$15+15\times\frac{1}{12}+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^2+15\times\left(\frac{1}{12}\right)^3+\cdots$$

$$=15+15\times\left\{\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^3+\left(\frac{1}{12}\right)^4+\left(\frac{1}{12}\right)^5+\cdots\right\}$$

であるから｛ ｝の中の無限等比級数の値を求めればよい。区間［０，１］を 12 等分すれば



となるので，｛ ｝の中の無限等比級数の値＝$\dfrac{1}{1+10}$＝ 1/11

よって，求める時刻は $15+15\times\dfrac{1}{11}=16\dfrac{4}{11}$分

すなわち　３時 $16\dfrac{4}{11}$分 ‥‥（答）　　　である。

さて，いままでの求め方は，区間［０，１］を何等分かして求めてきたが，前提として，区間［０，１］の中に同じ長さの区間，■と□の両方をとることができるときであった。

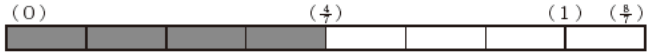
では，このように同じ長さの区間を２個とれない場合はどのように工夫すればよいのだろうか？すなわち無限等比級数（★）において，$\dfrac{1}{2}<r<1$ となるときである。

たとえば，$r=\dfrac{4}{7}$のときの無限等比級数

$$\frac{4}{7}+\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{4}{7}\right)^5+\left(\frac{4}{7}\right)^6+\cdots$$

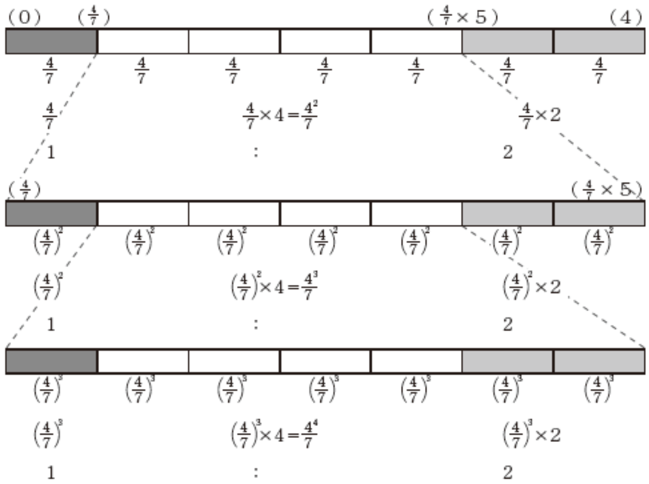
の値について考えてみよう。

長さ 4/7 の区間を２個とると下図のように長さの合計は 8/7 となり１を超えてしまう。



ではどうすればよいのか。

それには閉区間［０，４］を考え，これを７等分することを考えればよいのである。以下のように繰り返していく。



ここで□□□□の部分が限りなく０に近づくので結局，図は次のようになる。

よって

$$■=4\times\frac{1}{1+2}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \frac{4}{7}+\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\left(\frac{4}{7}\right)^5+\left(\frac{4}{7}\right)^6+\cdots=\frac{4}{3}$$

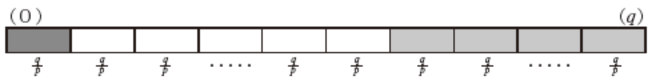
となる。

以上の考え方から，一般に p，q（$0<q<p$）を正の整数とするときも同様の方法で

$$\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^3+\left(\frac{q}{p}\right)^4+\left(\frac{q}{p}\right)^5+\left(\frac{q}{p}\right)^6+\cdots$$

の値を以下のようにして求めることができる。

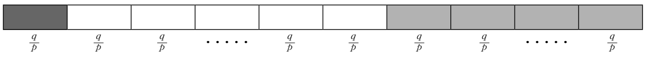
すなわち区間［０，q］を p 等分して同様にして考えると



ここで，■の部分は$\frac{q}{p}$が１個分あり，□の部分には$\frac{q}{p}$が q 個分ある。また，区間［０，q］を p 等分したので，$\frac{q}{p}$は区間［０，q］の中に全部で p 個ある。

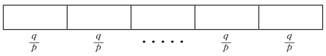
したがって，■の部分には，$\frac{q}{p}$は結局（$p-1-q$）個分あることになる。

したがってこれらの部分の長さの比は



1 : q : $p-1-q$

さらに



（長さ $\dfrac{q}{p}$ が q 個）

の長さは，

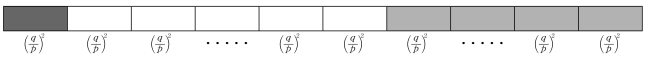
$$\frac{q}{p}\times q=\frac{q^2}{p}$$

であり，この部分を上記と同様にして，次の図のように p 等分して同様にして考えると，等分した一つ一つの長さは

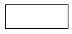
$$\frac{q^2}{p}\div p=\frac{q^2}{p^2}=\left(\frac{q}{p}\right)^2$$

となる。

したがって，このときの図は次のようになる。



1 : q : $p-1-q$

この操作を繰り返していくことにより真ん中の  の部分の長さが０に限りなく近づくので最終的に次の図のようになる。

1 : $p-1-q$

よって以上により，p，q（$0<q<p$）を正の整数とするとき

$$\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^3+\left(\frac{q}{p}\right)^4+\left(\frac{q}{p}\right)^5+\left(\frac{q}{p}\right)^6+\cdots$$

の値は，線分区間［０，q］を，１：$p-1-q$ に分けた  の長さである。

したがって

$$\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^3+\left(\frac{q}{p}\right)^4+\left(\frac{q}{p}\right)^5+\left(\frac{q}{p}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{q}{1+(p-1-q)}$$

$$=\frac{q}{p-q}$$

このように，p, q を正の整数とするとき，公比が正の有理数 $0<q/p<1$ の場合についても，テープ図を使う以上の方法によって，無限等比級数がある値に収束することが直観的に理解でき納得することができるであろう。

さらには一般に任意の正数ｒ（＜１）に対しても，区間［0，a］をｒ：ar：a（1-r）-ｒに分けることにより，また任意の負数ｒ（＞-１）に対しては，正負別々に考えることによりテープ図から同様にして値を求めることができる。

これらの方法は，学生時代に文系の数学をあまり使わない学科等に所属していた方々や，数学が苦手だった方々に対しても，興味や関心を持たせるうえで，さらには探求する精神を養ううえで，有効な手段になりうると思われる。

学生時代に数学に苦手意識を持っていた方等が，もう一度学び直したいと思うとき「形式的論理よりも納得を」得てもらうために，全体を見ることができる，ゲシュタルトを得ることができることが重要と思われる。細部にこだわらずにイメージできることが大事である。(ケーラーたちが言うように部分の総和と全体は異なり，また，マイケル・ポランニーが言っているように，包括的全体は全体従属的諸細目への注目を経て初めて浮かび上がるもので，本来の納得は，部分への執着が必要なのであり１本１本の木なくして森はあり得ないのであるが)

そのためには視覚化できることが重要であり，コンピュータ等が大いに利用されてよいであろう。

･････････ 数学のもとになるのは頭ではない，情緒だ，数学は印象でやるもので記憶はかえって邪魔になる，忘れるものはドンドン忘れて行く，これが極意である（岡　潔）

参考文献

１．坂本憲二 「ある無限級数の値」 定数研紀要「定数第４号」東京都公立高等学校定時制通信制教育研究会数学部会（1981）

２．何森仁　他 「生き生き数学」三省堂（1987）pp.102-103

３．松尾吉知 「数学教育におけるモデルについての一考察」算数数学教育実践講座 20　算数数学教育実践講座刊行会（1988）pp.406-410

４．NCTM 発行“STANDARDS”（1989）東京理科大学第１部数学科長野研究室訳「第９～ 12 学年スタンダード（1990）p.85

註

先行研究について

無限等比級数の和の求め方についての、このような図を使った視覚化によるものは、筆者らの知る限り、何森仁（1987 参考文献２）や、同じくアメリカの学習指導要領に

当たるスタンダード（1989 参考文献４）にあるが、いずれも面積によるものである。

この方法の欠点は、公比 1/2 のときは大変分かりやすいのだが、公比 1/3 になると突然複雑になり、さらにそれ以外の公比だと直観的に把握するのはかなり困難となることである。

これについては、松尾（1990 参考文献３）が「論理指導とベン図を例として」ベン図が論理指導において学校教育のなかで随分行われている割にすっきりしたものではなくモデル化として成功していないと批判し、これとは逆に「理論と一体化したモデル化について」数学理論や物理学的なモデルには、モデルそのものが理論を代表するものもあるとして例をあげている

そして最後に n 次元空間を図に表す方法として松尾が使用するモデル（このモデルは特に general topology での高次元空間で理論展開するとき大変利用価値が高い）を紹介すると同時に、無限等比級数の和の求め方について公比 1/2 のときの図に言及し、「数学的な用語や理論に具象的なモデルを与えて、理解を助長させていることは常識となっているし、また理解し易い例が多いことは認められるが、理解をさせることの努力を、モデル化することにふりかえてしまう恐れもあるように思う」との見解を示し批判している。

本稿で示した筆者らによる「テープ図を使っての説明」は松尾が批判した何森（1987 参考文献２）や米国のスタンダード（1989 参考文献４）と比較し無限等比級数のより一般的な表現でありしかも学習者にとって納得のし易いものとなっている。