（別刷）

新作問題を通した探究的学びを考える

～問題から問題へ～

坂本　憲二

生涯学習研究
── 聖徳大学生涯学習研究所紀要 ──
第 18 号　別冊
2020 年 3 月

新作問題を通した探究的学びを考える

～問題から問題へ～

坂本 憲二

要旨

リカレント教育における学びは，狭義には仕事を前提とした学び直しであり，仕事に直結する知識・スキル等を対象とする。したがってリカレント教育における数学としても大半は仕事に直結する数学の知識・スキルが対象となるため，たとえば経営・マネジメントに必要な数学は何か，電気・制御関係に必要な数学は何かなどを考えると，専門性の高い様々な数学の分野も含まれ，数学の習得状況レベルに応じたカリキュラムも準備しておく必要がある。

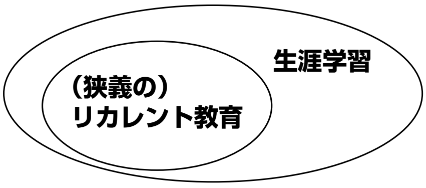
しかし，そうした中，リカレント教育での学びにおいても，興味関心を高める学びとして探究的な学びが考えられる。なぜなら，学習者に「考えることは楽しい」と感じさせ，「充実感を伴わせる学習」を重ねることを通じて，数学的な思考力･表現力を高め，さらには数学的論拠に基づいた判断ができる等の創造性の基礎を培うことが重要であるからである。

ここでは，オリジナルの新作問題を題材として発展的な問題を作っていく過程を眺めながら，少しでも高等学校の初等数学から大学初年級及び高等数学にかけての数学に興味関心を持っていただくことを狙いとして本稿を記すこととした。新作問題は，学習者として理系の学部学科を卒業した社会人を想定したレベルの問題である。特に，新作２と新作２－１や新作３，さらには新作４や新作４－１はより発展的な問題へと展開しているので，学習者はその過程を眺めることで，さらには学習者自身が新たな問題を見つけ発展させていく探究活動への移行が考えられる。

１．はじめに

リカレント教育における数学の役割は，生涯学習同様に数学・算数の学び直しやスキルアップ，さらには数学的・算数的事項について興味関心のあるものや深めたいものなど，学習者が学びたいと思った数学的事柄等を，「適時選択」できる機会を提供できる環境がすでに準備されていることである。

生涯学習は趣味や生きがいのために学ぶことも含んでいるが, リカレント教育は狭義には仕事を前提とした学びで, 仕事に直結する数学の知識・スキルが対象となる。



仕事に直結する数学としては，たとえば経営・マネジメントに必要な数学ならば，微分積分・行列，確率・統計及び確率･統計による認知，数理論理学の初歩，グラフ理論，ゲーム理論などであるが，当然，理系の技術者にもこれらは必須であろう。技術者はその他に各部門で必要な数学トピックスがある。例えば電気・制御関係では複素解析での計算方法やラプラス変換, 他の分野でもベクトル解析, フーリエ解析，微分方程式等々は必須であろう。

ところで，大学での学びに対しては，中央教育審議会答申「新たな未来を築くための大学教育の質的転換に向けて～生涯学び続け，主体的に考える力を育成する大学へ～」（2012.8.28）においては,「生涯にわたって学び続ける力，主体的に考える力を持った人材は，学生からみて受動的な教育の場では育成することができない。従来のような知識の伝達・注入を中心とした授業から，教員と学生が意思疎

通を図りつつ，一緒になって切磋琢磨し，相互に刺激を与えながら知的に成長する場を創り，学生が主体的に問題を発見し解を見いだしていく能動的学修（アクティブ・ラーニング）への転換が必要である。」さらにそのために，「主体的な学修時間の実質的増加･確保が必要である。」と述べられている。

この後，高大接続実現に向けた高・大教育及び大学入試等の一体的改革に関する中央教育審議会答申（2014.12.22）が出され，初等中等教育においてもアクティブラーニングが行われるようになってきた。

このことは当然リカレント教育についても言えることで，仕事上必要とされる数学の知識やスキルの習得に目が向きがちであるが，重要なのは学習者がじっくりと時間をかけ「なぜ？」を自問自答し自分で考え主体的に一歩一歩理解していくことである。

2. 本稿の目的

リカレント教育での学びにおいても，興味関心を高める学びとして「探究的な学び」が考えられる。なぜなら，学習者に「考えることは楽しい」と感じさせ,「充実感を伴わせる学習」を重ねることを通じて，数学的な思考力・表現力を高め，さらには数学的論拠に基づいた判断ができる等の創造性の基礎を培うことが重要であるからである。

したがって，本稿における目的は，リカレント教育における数学として興味が湧くような問題及び解答を新たに作成することである。また，問題のレベルとしては，リカレント教育の学習者を大学の理系，技術系で学んだ方や数学愛好者を想定した問題とする。

3. 新作問題

以下のすべての新作問題は，すべてオリジナルである。

予備知識を必要としない整数問題等が導入問題として考えられる。

新作問題１

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\mathrm{CA}}$$

を満たす整数 A,B,C を求めよ。

ただし A,B,C は１～９の数字で，たとえば A ＝３，B ＝２のとき，AB は２桁の整数 32 であり，したがって $\frac{1}{\mathrm{AB}}$ は，分数 $\frac{1}{32}$ を表すものとする。

様々な解法が考えられると思われる。解答は略すが，

Ａ＝４，Ｂ＝２，Ｃ＝１　　Ａ＝８，Ｂ＝４，Ｃ＝２

の２組が解である。

次は，比較的取組み易い級数についての問題である。

新作問題２

任意の自然数ｍに対して次の級数の値も自然数（偶数）となることを示せ。

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}}$$

証明　$\mathrm{f(m)} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}}$　とおくと

$$\mathrm{f}(0) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathrm{n}}} = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（１）$$

いま，f(1), f(2),・・・・・, f(m-1）のすべてが偶数に確定したと仮定しよう。

ここで，$\sum \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}}$ の第Ｎ項までの和を，$f_N(\mathrm{m})$ とすれば

$$f_N(\mathrm{m}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}}$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{\mathrm{n}=2}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（２）$$

両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると

$$\frac{1}{2} f_N(\mathrm{m}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}+1}}$$
$$= \sum_{\mathrm{n}=2}^{N} \frac{(\mathrm{n}-1)^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}} + \frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（３）$$

したがって

（２）－（３）から

$$\frac{1}{2} f_N(\mathrm{m}) = \frac{1}{2} + \sum_{\mathrm{n}=2}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}} - (\mathrm{n}-1)^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}} - \frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}}$$
$$= \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m}} - (\mathrm{n}-1)^{\mathrm{m}}}{2^{\mathrm{n}}} - \frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}}$$

ここで，

$$\mathrm{n}^{\mathrm{m}} - (\mathrm{n}-1)^{\mathrm{m}} = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{m}} (-1)^{\mathrm{r}-1} \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{r}} \mathrm{n}^{\mathrm{m-r}}$$

であるから，

$$\frac{1}{2} f_N(\mathrm{m}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{m}} (-1)^{\mathrm{r}-1} \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{r}} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m-r}}}{2^{\mathrm{n}}} - \frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}}$$
$$= \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{m}} \left\{ (-1)^{\mathrm{r}-1} \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{r}} \sum_{\mathrm{n}=1}^{N} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m-r}}}{2^{\mathrm{n}}} \right\} - \frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}}$$

よって，

Ｎ→∞とすれば　$\frac{1}{2} f_N(\mathrm{m}) \to \frac{1}{2} f(\mathrm{m})$, $\frac{N^{\mathrm{m}}}{2^{N+1}} \to 0$

であるから，

$$\frac{1}{2} f(\mathrm{m}) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{m}} \left\{ (-1)^{\mathrm{r}-1} \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{r}} \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{\mathrm{n}^{\mathrm{m-r}}}{2^{\mathrm{n}}} \right\}$$

$= \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\binom{m}{r}f(m-r)$

ゆえに

$f(m) = 2\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\binom{m}{r}f(m-r)$

がなりたつ。

したがって，（１）と仮定から，数学的帰納法により，$f(m)$は偶数である。■

いくつか求めてみよう。

$$\begin{aligned} f(1) &= 2\cdot\binom{1}{1}\cdot f(0) \\ &= 2\cdot 1\cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\cdot\left\{\binom{2}{1}f(1)-\binom{2}{2}f(0)\right\} \\ &= 2\cdot(2\cdot 2-1\cdot 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 2\cdot\left\{\binom{3}{1}f(2)-\binom{3}{2}f(1)+\binom{3}{3}f(0)\right\} \\ &= 2\cdot(3\cdot 6-3\cdot 2+1\cdot 1) \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 2\cdot\left\{\binom{4}{1}f(3)-\binom{4}{2}f(2)+\binom{4}{3}f(1)-\binom{4}{4}f(0)\right\} \\ &= 2\cdot(4\cdot 26-6\cdot 6+4\cdot 2-1\cdot 1) \\ &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 2\cdot\left\{\binom{5}{1}f(4)-\binom{5}{2}f(3)+\binom{5}{3}f(2)-\binom{5}{4}f(1)+\binom{5}{5}f(0)\right\} \\ &= 2\cdot(5\cdot 150-10\cdot 26+10\cdot 6-5\cdot 2+1\cdot 1) \\ &= 1062 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(6) &= 2\cdot\left\{\binom{6}{1}f(5)-\binom{6}{2}f(4)+\binom{6}{3}f(3)-\binom{6}{4}f(2)+\binom{6}{5}f(1)-\binom{6}{6}f(0)\right\} \\ &= 2\cdot(6\cdot 1062-15\cdot 150+20\cdot 26-15\cdot 6+6\cdot 6-1\cdot 1) \\ &= 9174 \end{aligned}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

すなわち，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} &= \frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\frac{5^2}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n} &= \frac{1^3}{2^1}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\frac{4^3}{2^4}+\frac{5^3}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n} &= \frac{1^4}{2^1}+\frac{2^4}{2^2}+\frac{3^4}{2^3}+\frac{4^4}{2^4}+\frac{5^4}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n} &= \frac{1^5}{2^1}+\frac{2^5}{2^2}+\frac{3^5}{2^3}+\frac{4^5}{2^4}+\frac{5^5}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 1062 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{2^n} &= \frac{1^6}{2^1}+\frac{2^6}{2^2}+\frac{3^6}{2^3}+\frac{4^6}{2^4}+\frac{5^6}{2^5}+\cdots\cdots \\ &= 9174 \end{aligned}$$

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

となるのである。

次に，この問題をさらに拡長した問題を考えてみる。

新作問題２－１

任意の自然数ｍに対して次の級数の値が自然数となるための実数ａ（＞０）の条件を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^m}{a^n}$$

この級数をｍの関数とみてF(m)とおくと，問題１と同様にして

$$F(m) = \frac{a}{a-1}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\binom{m}{r}F(m-r)$$

がなりたつ。

実際にｍが０～３のときのＦ(m)の値をａで表すと

$$F(0) = \frac{1}{a-1}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{a}{a-1}\times\binom{1}{1}\times F(0) \\ &= \frac{a}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{a}{a-1}\left\{\binom{2}{1}F(1)-\binom{2}{2}F(0)\right\} \\ &= \frac{a}{a-1}\{2F(1)-F(0)\} \\ &= \frac{a(a+1)}{(a-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{a}{a-1}\{3F(2)-3F(1)+F(0)\} \\ &= \frac{a(a^2+4a+1)}{(a-1)^4} \end{aligned}$$

となる。よって，a（>0）の値は，0 < a < 3の範囲にあることがわかり，aを自然数に限定すれば題意を満たすaの値はa = 2のみである。また，aを実数に拡げると，例えば，$a = 1 + \frac{1}{m}$ は明らかに条件を満たすが，筆者には，まだ正数aの満たすべき条件は不明である。

次の問題は，数学の得意な高校生に定評のある雑誌「大学への数学」（東京出版）の《宿題》というコーナーで出題された問題である。

《宿題》

nは自然数の定数で，x，yは

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{n}\ ,\ x \leq y$$

をみたす自然数とするとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ を最大とする自然数x，yの値を求めよ。

求める値は，x = n + 1，y = n^2+ n + 1 であるが，とても手ごわい問題であったようである。同誌に載っていた解答以外の，より本質的なオリジナルの解を次に示す。

≪解≫

x = n+α（$1 \leq \alpha \leq n$）とすると，

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{n}-\frac{1}{x}=\frac{\alpha}{n(n+\alpha)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

この不等式をみたす $\frac{1}{y}$ の最大値，つまりyの最小値を求めると（1）より

$$y>\frac{n(n+\alpha)}{\alpha}=\frac{n^2}{\alpha}+n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

であるから，（2）より，ガウス記号を用いて

$$y=\left[\frac{n^2}{\alpha}\right]+n+1$$

と表せる。

さて，nは定数であるので，題意から，

$$\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

の最小値を与えるαを求めればよい。

よって

$$(3)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{\alpha}\right]+n+1}\right)$$

$$=\frac{\alpha\left[\frac{n^2}{\alpha}\right]-n^2+\alpha}{n(n+\alpha)\left(\left[\frac{n^2}{\alpha}\right]+n+1\right)}$$

ここで，

α が n^2 の約数ならば，分子 = α（≥1），

α が n^2 の約数でなければ，1≤ 分子 ≤ α

であるから，ここで，

$$f(\alpha)=(n+\alpha)\left(\frac{n^2}{\alpha}+n+1\right)$$

とおくと

$$(3) \geq \frac{1}{n(n+\alpha)\left(\frac{n^2}{\alpha}+n+1\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{1}{f(\alpha)}$$

$f'(\alpha)<0$ でるから，$\alpha = 1$ のとき $\frac{1}{f(\alpha)}$ は最小値をとる。

以上により，x = n + 1，y = n^2+ n + 1 である。■

この問題をさらに拡張したのが次の新作問題3である。

新作問題3

nは自然数の定数で，a_i（i= 1，2,・・・,m）は，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{1}{n}\ ,\ a_i \leq a_{i+1}$$

をみたす自然数とするとき，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}$ を最大とする自然数 a_i（i = 1，2,・・・,m）の値を求めよ。

≪解≫

今までと同様の議論で，$a_0 = n$

とすれば，　$a_i=\prod_{\mu=0}^{i-1}a_\mu+1$

である。■

次に，高等学校や大学初年級の初等数学の範囲外である数学に関する問題に関しての材料を考えてみる。解くのには相当のレベルの高い数学が必要とされるがどのような問題なのかを理解できる知識のレベルとしては初等数学の範囲以内で十分理解できる問題である。このような問題としては「整数論」に関する問題が考えられる。

ただし，たとえば，フェルマーの定理（イギリスのアンドリュー・ワイルズによって完全に証明された）は，問題が何を問うているのかは簡単にわかるが，ワイルズの証明を理解するのには相当な高等数学の知識と能力が必要とされ不可能である。n = 3，4以外の場合は，フェルマーの定理は，「いじる」ことは困難と思われる。

したがって，初等数学の知識ないしそれよりほんの少しだけ高いレベルで，いわゆる「高等数学」（高等学校の数学

は「初等数学」）の定理を「いじって」みて，そこから，思いがけない不思議な結果が出れば大変面白いと思われる。

そのような問題を考えてみた。そのために，いくつかの準備をする。

数列 $\{a_n\}$ といった場合，a_n は自然数 n の関数であり，この順序づけられた列において n 番目の数である。a_n の代わりに $f(n)$ で表したりする。

さて，ここで自然数 n の代わりに素数 p_n を考える。すなわち $f(n)$ の代わりに $f(p_n)$ を考えることとする。ただし p_n は，素数の中で n 番目に小さい素数を表すものとする。

すなわち

$p_1 = 2$　$p_2 = 3$　$p_3 = 5$　$p_4 = 7$　$p_5 = 11$　$p_6 = 13$　$p_7 = 17$　$p_8 = 19$・・・

である。

明らかに $f(p_n)$ は，順序付けられた $\{f(p_n)\}$ において最初から n 番目の数である。

たとえば

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ は，$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \cdots$

を表すが

数列 $\left\{\frac{1}{p_n}\right\}$ は，$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{31}, \cdots$

を表している。

いま関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{x}$ としたとき，

$\{f(n)\}$ は，$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots\}$ のことであり

$\{f(p_n)\}$ は，$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \cdots\}$ のことである。

たとえば，このときの数列 $\{f(p_n)\}$ の第 7 項は $f(p_n) = \frac{1}{17}$ である。

ここで，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ と　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$　の収束・発散について調べてみよう。

上で述べた $f(x) = \frac{1}{x}$ としたときの二つの無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ の収束・発散については，よく知られているように

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$　・・・①　　　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$　・・・②

となり両方ともに発散する。

証明は，例えば①は高校数学の範囲内であり，$f(x) = \frac{1}{x}$ のグラフの $x = 1$ から $x = n+1$ までの有限範囲において，横が 1 で縦が $\frac{1}{x}$ の矩形（長方形）の面積の和 $= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ が，このグラフと $x = 1$，$x = n+1$，x 軸とで囲まれる面積 $= \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx$ よりも大きいこと示して，あとは $n \to \infty$ とすればよい。

②についての証明は，Euler が証明した。（いわゆるオイラー積を使って証明する。②の結果からも素数が無限にあることが示される。）この素数の逆数の和が無限大に発散する事実も有名である。

すなわち，

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots$ も

$\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots\cdots$

も，ともに無限大に発散するのである。

ここで問題である。上記で説明したのは，「$f(x) = \frac{1}{x}$ のときは，二つの無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ と $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ は，ともに発散する」場合であった。

それに対し，「『　数列 $\{f(n)\}$ による無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が発散する』のに対して，『数列 $\{f(p_n)\}$ による無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ が収束する』　ような 関数 $f(x)$ はあるのか？」という疑問が当然出てくるであろう。

ここで必要となってくる事実が「高等数学」の範囲ではあるが，次の有名な定理である。

$\pi(x)$ を，自然数 x を超えない素数の個数を表しているものとする。このとき次の定理が成り立つ。

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1 \quad (\text{素数定理})$$

これにより

$$p_n = n\log n + n\log\log n + o(n)$$

が成り立つことが知られている。

次の新作問題は，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が発散するのに対して，$\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ が収束するひとつの例である。

新作問題 4

次のことを示せ。ただし p_n は n 番目の素数とする。

$f(x) = \frac{1}{x\log x}$ のとき，

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \infty$　　　であるが

$\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n \log p_n} < \infty$　　　である。

≪解≫

与えられた $f(x)$ に対して(divergence)と(convergence)の頭文字をとって $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = D$， $\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n) = C$ とおくことにする。

$p_n = n\log n + n\log\log n + o(n) > n\log n$ より

$$C < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n\,\{\log(n\log n)\}^k} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+k}} < \infty$$

一方，よく知られているように

$$D > \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(\log n)^k} > \int_2^{m+1} \frac{dx}{x\log x} = [\log\log x]_2^{m+1} \to \infty \quad ■$$

上記で示した証明の他に，イプシロン・デルタの方法でも証明できる。本来はそのほうがより初等的であるが省略する。

また，上記の証明は，問題４を拡張した次の問題の証明にもなっている。

新作問題４－１

$f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^k}$ のとき，

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\log n)^k} = \infty \quad (k \leq 1)$ 　　であるが

$\sum_{n=1}^{\infty} f(p_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{p_n(\log p_n)^k} < \infty \quad (k>0)$ 　　である。

４．まとめ

数学の研究においては未解決の問題を解くことが大変重要であり，また未解決の問題数は果てしなく多い。数学では重要な未解決問題がありその解決（証明結果）が数学全般と関わりを持つようなものが重要な問題である。数学の論文は，定義および定理と証明から成っている。他の学問における所謂「検証」が数学では「証明」である。他の学問の「検証」が時代や環境によって真から偽になる場合もありうるが数学の「証明」の場合は真と認められればほぼ決定する。

ここでは新作問題として出しているが個々の問題に繋がりが無いので定理として理論を展開することはしていない。しかし，新作２と新作２－１や新作３，さらには新作４や新作４－１はより発展的な問題へと展開しているので，学習者はその過程を眺めることで，さらには学習者自身が新たな問題を見つけ発展させていく探究活動への移行も考えられる。

国際バカロレアでは，生徒自ら問題を見つけ研究し解決していく学びを EE といい IBDP のコアとなる重要な科目となっている。

このような学びは，志を同じくする課外活動でもみられる。

実際に，ある高等学校の部活動においては，このような探究活動をして，素晴らしい実績を出しているところもある。次の文章はこの高校の研究部の部長の言葉である。

「数理科学部では名前の通り，主に「数学」の研究，そしてよい意味で「高校生らしくない」活動をしています。・・・・・・（中略）・・・・・・しかし，僕たちの「数学」は，問題を自分たちで作り出しているため決まった答えがありません(わかりません)。数学の本当の面白さというのは与えられた問題を解くことではなく，自分で新しい問題を作りその問題を解くことだと考えています。高校生が数学で新しい発見をすることは不可能と思われがちです。僕も無理だと思っていたことがありますが，なんとかなるものです。実際に，今までに論文が専門誌に掲載されたり，国際学会で研究発表を行ったりしています。」

リカレント教育においても主体的な学びである探究活動は効果のあるものだと考える。

注）

1）同答申（2012.8.28）では学生が主体的に学修する力を確実に身につけるために，学士課程教育の質的転換の必要性及び主体的な学修の時間を担保する重要性を指摘している。また，金子（2012）は主体的な学習を促すには，大切なのは自律的な学習時間であるとして基調講演を行っている。

2）新作問題１はパズル関係問題も含め様々な書籍雑誌やインターネット等で未だに掲載されていない。新作問題２については，m が１のときのみ昭和 38 年の和歌山県立医科大学の入試問題として出題されているが，当時の「大学への数学臨時増刊日々の演習」には難問として掲載されている。この２及び２－１の問題は基本的な級数であるが「岩波数学公式Ⅱ」（岩波書店）や内田寅雄「級数論」（槙書店）も含め級数に関わる書籍等またはインターネット等には掲載されていない。新作問題３，４や発展問題についても同様である。

3）有限問題なのでエクセル等でしらみつぶしに探していけば必ず見つかるが，できる限りエレガントな解をここでは期待する。整数や比の条件から未知数の範囲を狭め場合分けすれば解決する。エレガントな解としてはたとえば A，B，C はこの順に減少する等比数列であることを示し，（9，3，1），（8，4，2），（4，2，1）が候補に挙がるが題意を満たすものは後の２組である，などいくつ

かの方法が考えられる。

4) 新作問題4の結果は不思議である。なぜなら,「すべての自然数 n の逆数の和（調和級数)」と「すべての素数 p_n の逆数の和」は両方ともに発散するという有名な数学的事実があるからである。従ってこれもまたよく知られている級数である「n log n の逆数の和」は発散する。従って上記のアナロジーから当然「$p_n \log p_n$ の逆数の和」も発散すると思われるが驚くことに発散せず収束するのである。

5) EE（Extended Essay；課題論文）は IBDP（国際バカロレアディプロマプログラム）で学ぶコア科目の一つでディプロマを取得するために不可欠である。研究の成果を 4,000 語のエッセイとしてまとめ，生徒は校内の指導教員の指導の下で選んだ話題について独立して研究・調査を行う。EE は外部評価の対象で，TOK（知の理論）と合わせて合計３点となり，IB ディプロマの総合得点に加算される。目標は 4,000 字の英語の論文を書く力，指導教官から Viva Voce という口頭試問を受ける力を養うことで, 生徒はどの科目で EE を書いてもよいが HL（上級レベル）の科目でとることが望ましい。EE は IB によって試験官として任命された外部評価者によって評価される。

6) 関西学院高等部数理科学部「部長のことば」（兵庫県西宮市にある私立のキリスト教プロテスタント系小中高大一貫校）

引用・参考文献

1. 二宮裕之他「第 98 回全国算数・数学教育研究（岐阜）大会報告」日本数学教育学会誌第 98 巻 2016 第 9 号，p30-47
2. 日本数学会編 岩波数学辞典第３版 岩波書店 1993, p211-216
3. 黒木正憲・山本矩一郎他 大学への数学２月号 東京出版 1977
4. 坂本憲二「ある無限級数の値」定数研紀要「定数第４号」東京都公立高等学校定時制通信制教育研究会数学部 1981
5. 黒木正憲・山本矩一郎「日日の演習」問題 42 大学への数学４月号臨時増刊 1972，p45，p254，p263
6. 内田虎雄 級数論上 数学選書 槇書店 1969，p40-110
7. 高木貞治 解析概論 改訂第３版軽装版 岩波書店 1984 p149
8. 坂本憲二「素列」からなるいくつかの収束する無限級数について 杏林大学研究報告第 34 巻 2017,p1-5
9. 渡辺信「生涯学習と数学教育」日本科学教育学会，研究会研究報告 vol.3 No6. 2016，p39-42
10. 「リカレント教育の拡充に向けて」文部科学省専門教育課 文部科学省 2018
11. 金子元久「主体的な学びへの転換を図るために」VIEW21 大学版 2012 特別号 p4-9
12. 森口繁一他「岩波数学公式Ⅱ級数・フーリエ解析」岩波書店 2019，p29-136